Ασκ 73 Από το Θ. Αναπαράστασης Cauchy-Taylor, έχουμε το εξής. f ολόμορφη ⇒ ⇒ f αναλυτική.

- $\exp(z+\pi i) = e^{z+\pi i} =$
$= e^{z} e^{\pi i} = e^{z}(\cos\pi + i\sin\pi) =$
$= e^{z}(-1+i\,0) = -e^{z}$.

και:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n}$$

με $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(J)}{(J-a)^{n+1}}\,dJ.$

Άρα έστω $f(z) = -e^{z}$. Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ ως εκθετική, επομένως είναι αναλυτική. Έτσι, μπορεί να γραφεί σε ανάπτυγμα Taylor. Επειδή, το σημείο μας είναι το 0, έχουμε:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z)^{n}$$

→ Παραγοντική Ολοκλήρωση

- $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{r} \frac{e^{-J}}{(J-0)^{n+1}}\,dJ = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{r}\frac{e^{-J}}{J^{n+1}}\,dJ = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{r}\frac{e^{-J}}{J^{n} J}\,dJ.$

Όμοιως και οι υπόλοιπες συναρτήσεις.

ή $-e^{-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^{n}}{n!}$

(β) Πόλος τάξης $m \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $c_{-n} = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n > m$ και $c_{-m} \neq 0$

(γ) Ουσιώδης ανωμαλία $\Leftrightarrow$ υπάρχουν άπειρα $n \in \mathbb{N}$ με $c_{-n} \neq 0$

<u>Παράδειγμα</u>: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}^*$ ως σύνθεση ολόμορφων: $w \longmapsto e^w$, $z \longmapsto \frac{1}{z}$

Με $w = \frac{1}{z}$ έχουμε $g(w) = g\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n!}}_{c_{-n}} \frac{1}{z^n}}_{\text{Ανάπτυγμα Laurent της } f \text{ στο } D(0,0,+\infty)}, \quad z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = D(0,0,+\infty)$$

Συνεπώς η f έχει στο 0 ουσιώδη ανωμαλία

Οπότε $f(z) = \frac{1}{-(z-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^{n+1}} =$

$$= \sum_{\substack{n=0 \\ n+1=1}}^{\infty} \left(-(z_0-a)^n\right) \frac{1}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-(z_0-a)^{n-1}\right) \frac{1}{(z-a)^n} ,$$

δηλαδή για $|z-a|>|z_0-a|$ η σειρά Laurent της f έχει μόνο κύριο μέρος ενώ αντίστοιχα για $|z-a|<|z_0-a|$ έχει μόνο κανονικό μέρος

<u>Παρατήρηση</u>: Ουσιαστικά, για τη μελέτη σειρών Laurent εστιάζουμε στη συμπεριφορά της δυναμοσειράς του $w=\frac{1}{z-a}$.

<u>Θεώρημα: Αναπαράστασης σε σειρές Laurent</u>

Έστω $a\in\mathbb{C}$, $0\le r<R\le+\infty$ και $f: D(a,r,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη

Τότε η f αναπτύσσεται μοναδικά σε σειρά Laurent

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n , \quad z\in D(a,r,R) \quad \text{με}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta , \quad n\in\mathbb{Z} , \quad r<\rho<R$$

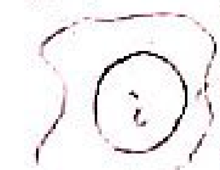
Ειδικότερα, ο συντελεστής $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(a,\rho)} f(\zeta)\,d\zeta$ ονομάζεται υπόλοιπο της f στο a και συμβολίζεται με $\text{res}_a f = c_{-1}$

↳ residual

SOS

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $c\in D$ και $f: D\setminus\{c\}$ ολόμορφη με σειρά Laurent κέντρου c.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-c)^n$$



$D(c,0,R) = \{z\in\mathbb{C}: 0<|z-c|<R\}$

Τότε το c είναι

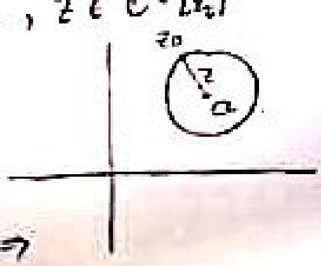
(α) Επουσιώδης ανωμαλία $\iff c_{-n}=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Από τις ιδιότητες των δυναμοσειρών $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n$ με $w=\frac{1}{z-a}$ προκύπτει ότι μια σειρά Laurent είναι ολόμορφη στον δακτύλιο σύγκλισης της $D(a,r,R)$ αφού έχουμε και τον κανόνα της αλυσίδας.

Δηλαδή: $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}$, $z\in D(a,r,R)$

$$= h(w) = h\left(\frac{1}{z-a}\right). \text{ όπου } g'(z)=h'(w)\left(\frac{1}{z-a}\right)' = h'(w)\left(-\frac{1}{(z-a)^2}\right)$$

<u>Παράδειγμα</u>: Αναπτύξτε τη συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{z_0-z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ σε σειρά Laurent γύρω από το $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$



<u>Λύση</u>: Για $z\in D(a,|z_0-a|) \Leftrightarrow 0\le|z-a|<|z_0-a| \Rightarrow$

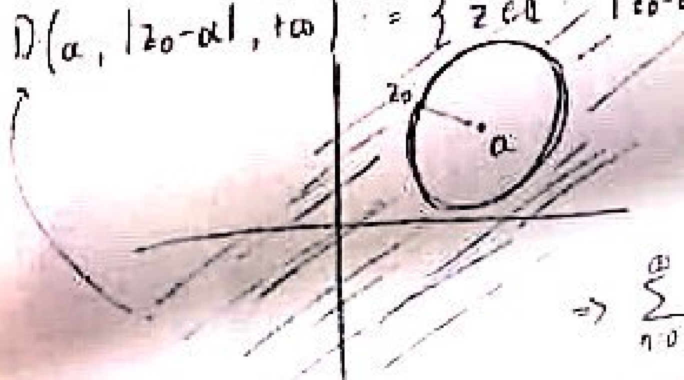
$$\Rightarrow \frac{|z-a|}{|z_0-a|}<1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(z_0-a)^n} = \frac{1}{1-\frac{z-a}{z_0-a}} = \frac{z_0-a}{z_0-a-z+a} = \frac{z_0-a}{z_0-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z_0-a)^{n+1}}(z-a)^n$$

Όμως, αυτό είναι η απόδειξη ότι η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ [το οποίο προκύπτει και από την ολομορφία με Θεώρημα Ανάπτυξης Cauchy-Taylor.]

Άρα $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ με $c_n=\frac{1}{(z_0-a)^{n+1}}$, $n\in\mathbb{N}_0$ και $c_n=0$ για $n\in\mathbb{Z}$, $n\le -1$.

Η $f:\mathbb{C}\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ (ολόμορφη) αναπτύσσεται σε σειρά Laurent και στον δακτύλιο $D(a,|z_0-a|,+\infty) = \{z\in\mathbb{C} : |z_0-a|<|z-a|<+\infty\}$,



αφού $|z-a|>|z_0-a| \Leftrightarrow \frac{|z_0-a|}{|z-a|}<1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_0-a)^n}{(z-a)^n} = \frac{1}{1-\frac{z_0-a}{z-a}} = \frac{z-a}{z-z_0} = -(z-a)f(z) \quad \forall z\in D(a,|z_0-a|,+\infty)$$

Άσκηση - Εξετάστε την ολομορφία των συναρτήσεων $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^2}$ (σε όλο το δυνατό μεγαλύτερο πεδίο ορισμού)

Ορισμός Το άθροισμα δύο σειρών συναρτήσεων της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n := \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n}_{\text{κανονικό μέρος}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-a)^n}}_{\text{κύριο μέρος}}$$

$\left(\frac{1}{z-a}\right)^n = w^n$

Η σειρά αυτή ονομάζεται σειρά Laurent με κέντρο $a\in\mathbb{C}$ η οποία συγκλίνει για κάποιο $z\in\mathbb{C}$ αν και το κύριο και το κανονικό μέρος συγκλίνουν για αυτό το z.

Άρα: ① Ως δυναμοσειρά, το κανονικό μέρος συγκλίνει στο $D(a,R)$ όπου $R\in[0,\infty]$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Επίσης, αφού το κύριο μέρος δεν ορίζεται για $z=a$.

Αν θέσουμε $\boxed{w=\frac{1}{z-a}}$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$ (δυναμοσειρά ως προς w με κέντρο 0) έχει επίσης ακτίνα σύγκλισης, ας είναι $\frac{1}{r}\in[0,+\infty]$ (με $0=\frac{1}{+\infty}$, $+\infty=\frac{1}{0}$)

δηλαδή για $|w|<\frac{1}{r}$ το κύριο μέρος της σειράς Laurent συγκλίνει αν και μόνο αν $\frac{1}{|z-a|}<\frac{1}{r} \iff |z-a|>r$

Συνεπώς η σειρά Laurent συγκλίνει για $z\in\mathbb{C}$ με $r<|z-a|<R$, δηλαδή στον δακτύλιο $D(a,r,R)=\{z\in\mathbb{C} : r<|z-a|<R\}$ κέντρου a, εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας r και R αντίστοιχα με $0\le r<R\le+\infty$

→ Ειδική περίπτωση: $r=0$